Chapitre 5
Intégration d'une fonction sur un intervalle

Exercice 1 : Montrer que les intégrales suivantes sont convergentes et calculer leur valeur.

$$(i)\ \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)},\quad (ii)\ \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt,\quad (iii)\ \int_0^1 \sin(\ln(t))dt.$$

Exercice 2 : Pour $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$, on considère les intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-at}dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-at}dt.$$

Montrer que les intégrales I et J sont convergentes et calculer leur valeur.

Exercice 3 : Étudier la convergence des intégrales ci-dessous.

$$(i)\ \int_1^{+\infty} \frac{(t-1)(t-5)}{t^2(t^2+1)}dt,\quad (ii)\ \int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t-1},\quad (iii)\ \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{t^2}\right)dt,$$

$$(iv)\ \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)dt,\quad (v)\ \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}dt,\quad (vi)\ \int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1-t)^{3/2}}dt,$$

$$(vii)\ \int_0^{+\infty} \sin(t)\sin\left(e^{-t}\right)dt,\quad (viii)\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt,\quad (ix)\ \int_0^{+\infty} t\sin(t)e^{-t}dt,$$

$$(x)\ \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}},\quad (xi)\ \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\quad (xii)\ \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln(t)}}dt.$$

Exercice 4 : Étudier la convergence des intégrales suivantes.

$$(i)\ \int_0^{+\infty} \left((t+1)^{1/3}-t^{1/3}\right)^2 dt,\quad (ii)\ \int_0^{+\infty} \left(t+2-\sqrt{t^2+4t+1}\right)dt.$$

Exercice 5 : Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère l'intégrale

$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{t-\sin(t)}{t^a}dt.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour que I_a converge.

Exercice 6 : On considère l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(e^t+1)(e^{-t}+1)}.$$

En posant $u = e^t$, montrer que I est convergente et calculer sa valeur.

Exercice 7 : On considère l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}dt.$$

En posant $u = \sqrt{t}$, montrer que I est convergente et calculer sa valeur.

Exercice 8 : On considère l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

En posant $t = (1+\sin(x))/2$, montrer que I est convergente et calculer sa valeur.

Exercice 9 : Pour $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$, on considère les intégrales

$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^a)} \quad \text{et} \quad J_a = \int_0^{+\infty} \frac{t^a dt}{(1+t^2)(1+t^a)}.$$

1. Montrer que les intégrales I_a et J_a sont convergentes.
2. En posant $u = 1/t$, montrer que $I_a = J_a$.
3. Calculer $I_a + J_a$. En déduire la valeur de I_a et J_a.

Exercice 10 : Pour $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$, on considère l'intégrale

$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2 + t^2} dt.$$

1. Montrer que l'intégrale I_a est convergente pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.
2. En posant $u = 1/t$, montrer que $I_1 = 0$.
3. En posant $t = au$, calculer la valeur de I_a pour $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 11 (Intégrales d'Euler) **:** On considère les intégrales

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) dt.$$

1. Montrer que l'intégrale I est convergente.
2. En utilisant le changement de variables $u = \pi/2 - t$, montrer que J est convergente et que $I = J$.
3. Calculer $I + J$. En déduire la valeur de I et J.

Exercice 12 : On considère l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

1. En utilisant une intégration par partie, montrer que I est convergente.
2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt \geqslant \frac{2}{(n+1)\pi}.$$

3. En déduire que $t \mapsto \sin(t)/t$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 13 : Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt.$$

1. Montrer que l'intégrale I_n est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $I_{n+1} = (n+1) \cdot I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire la valeur de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14 : Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ on considère l'intégrale

$$I_{n,p} = \int_0^1 t^n \ln^p(t) dt.$$

1. Montrer que l'intégrale $I_{n,p}$ est convergente pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.
2. Montrer que l'on a la relation

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad I_{n,p} = -\frac{p}{n+1} \cdot I_{n,p-1}.$$

3. En déduire la valeur de $I_{n,p}$ pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 15 : Pour $x \in \mathbb{R}$, on note

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la monotonie de f.
3. Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis un équivalent de f en $+\infty$.
5. Déterminer la limite de f en 0^+, puis un équivalent de f en 0^+.